INSTITUTO TECNOLOGICO AUTONOMO DE MEXICO
Economía II

Notas sobre el Modelo de Solow

1 Introducción

Robert Solow estaba fundamentalmente preocupado por comprender mejor los mecanismos que favorecen el crecimiento económico, y a mediados de los años cincuenta, formuló el primer modelo capaz de dar algunas repuestas interesantes. Su modelo es extremadamente simple, y si bien es cierto que en años posteriores se ha avanzado mucho en formular modelos más realistas y sofisticados, muchas de las predicciones de su modelo se repiten en los desarrollos actuales.

En estas notas revisamos los resultados más importantes del modelo de Solow. Tambien discutimos algunas implicaciones interesantes para el diseño de políticas económicas. Finalmente, revisamos brevemente la teoria moderna de crecimiento endógeno, y proponemos algunos ejemplos.

2 Supuestos del modelo

Para formular el modelo utilizaremos la siguiente notación: las variables en mayúscula representan magnitudes agregadas, tales como el PIB, el consumo, o el stock total de capital existente en la economía; las variables escritas en minúsculas representarán magnitudes expresadas en términos per cápita.

1. El PIB de la economía, Y, se obtiene combinando las unidades de capital, K, y de trabajo N, mediante una función de producción de rendimientos constantes a escala en estos dos factores: $Y = F(K, N)$.

2. Nos referimos al trabajo como *población* (es decir, suponemos que todas las personas en la economía son también trabajadores), y suponemos que el trabajo crece a una tasa constante $n \in [0, 1]$.

3. El capital se deprecia a una tasa constante $\delta \in [0, 1]$.

4. Los trabajadores solamente pueden destinar su renta a consumir y a ahorrar. En particular, supondremos que la propensión marginal al ahorro

es una fracción constante $s \in [0,1]$.

5. Tanto la tecnología como los demás parámetros del modelo (n, δ, y s), permanecen constantes a lo largo del tiempo.

3 Resultados preliminares

Como hemos supuesto que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala en K y N, entonces podemos obtener facilmente una expresión para el PIB en términos per cápita como sigue. Observa que

$$y = \frac{Y}{N} = \frac{F(K,N)}{N}.$$

Cuanto es $F(K,N)/N$? Como $F(K,N)$ presenta rendimientos constantes a escala, tenemos que

$$\frac{1}{N}F(K,N) = F\left(\frac{K}{N}, \frac{N}{N}\right) = F\left(\frac{K}{N}, 1\right) = f(k),$$

donde hemos utilizado la propiedad que satisfacen las funciones de rendimientos constantes a escala y la definición del capital per cápita ($k = K/N$). Combinando las ecuaciones anteriores llegamos a que

$$y = f(k). \tag{1}$$

Es decir, el PIB en términos per cápita es una función del stock de capital per cápita. Es más, también podemos deducir que $f(k)$ presenta rendimientos decrecientes en k.

Como ya tenemos unas ciertas nociones de Contabilidad Nacional, sabemos que en una economía sin gobierno y sin sector exterior se tiene que satisfacer la siguiente ecuación: $C+A = Y = F(K,N)$. Es decir, los bienes producidos en la economía se destinan al consumo y al ahorro. Dividiendo por N ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\frac{C+A}{N} = \frac{Y}{N} = \frac{F(K,N)}{N},$$

y finalmente podemos escribir

$$c + a = f(k), \tag{2}$$

donde $c = C/N$ representa el consumo en términos per cápita, y $a = A/N$ representa el ahorro en términos per cápita.

El siguiente elemento que resultará útil será conocer cuanto es a. De hecho, sabemos que los trabajadores ahorran una fracción s de su renta per cápita. Dado que la renta per cápita es igual a $f(k)$, entonces tenemos que $a = sf(k)$!. Como también sabemos que el consumo en términos per cápita tiene que ser igual a la fracción de la renta per cápita que no se destina al ahorro, también podemos concluir que $c = (1 - s)f(k)$.

4 La evolución del capial a lo largo del tiempo

Esta es la pregunta fundamental que el modelo de Solow quiere responder. La variación del capital a lo largo del tiempo es la diferencia entre el capital al final de un periodo menos el capital existente al principio del mismo, y la representamos como Δk. Ya sabemos que el ahorro en general tiende a aumentar la cantidad de capital, sin embargo, para determinar Δk necesitamos tener en cuenta que el capital existente al principio del periodo se deprecia a la tasa δ. Es decir, si en la economía no se ahorra, entonces tendremos que el capital agregado al final del periodo es solamente $(1 - \delta)K$ (en otras palabras, "perdemos" δK unidades de capital). Por tanto, si deseamos mantener constante el capital per cápita, debemos asegurarnos de que el ahorro permite reponer el capital depreciado. Expresando la relación anterior en términos per cápita, necesitamos ahorrar por lo menos δk unidades de capital. Igualmente, debemos tener en cuenta que la población crece a la tasa n. Esto quiere decir que si al principio del periodo el capital per cápita es $k = K/N$, debemos incrementar el capital per cápita existente en nk unidades si queremos que cada uno de los trabajadores existentes al final del periodo tengan a su disposición la misma cantidad de capital que los trabajadores del principio del periodo.

Teniendo en cuenta lo anterior, concluimos que para mantener intacta la cantidad de capital en términos per cápita necesitamos ahorrar por lo menos $\delta k + nk = (\delta + n)k$. Si ahora comparamos esta cantidad con el ahorro en términos per cápita tenemos que:

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + n)k. \tag{3}$$

Claramente, $\Delta k > 0$ cuando $sf(k) > (\delta + n)k$. En este caso tenemos que el ahorro realizado es mayor al ahorro necesario para cubrir la depreciación del capital y el crecimiento de la población, de forma que $\Delta k > 0$ y por tanto, el capital al final del periodo es mayor que el del principio del periodo. Igualmente, si $sf(k) < (\delta + n)k$ entonces $\Delta k < 0$, y por tanto, el

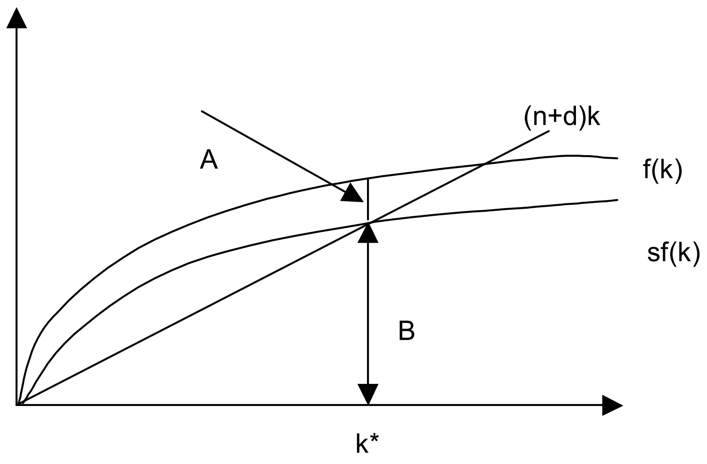

Figure 1:

stock de capital en términos per cápita tiende a disminuir a lo largo del tiempo. Finalmente $\Delta k = 0$ cuando $sf(k) = (\delta + n)k$, es decir, en este caso el ahorro cubre exactamente la depreciación del capital y el crecimiento de la población, y por tanto, el capital per capita a lo largo del tiempo permanece constante. Cuando $\Delta k = 0$ decimos que la economía se encuentra en un *estado estacionario*. Dado que en un estado estacionario el capital permanece constante, entonces también concluimos que tanto la producción, como el consumo y el ahorro (todo medido en términos per cápita), permanecen constantes a lo largo del tiempo.

La Figura 1 representa graficamente los distintos componentes de la equación (3). Observa que existen dos estados estacionarios: $k = 0$, y $k = k^*$. El primero de ellos no tiene demasiado interés económico: si los trabajadores no disponen de capital para producir el PIB es igual a cero, con lo que tanto el consumo como el ahorro también serán iguales a cero, y por consiguiente, la economía nunca podrá abandonar ese estado estacionario. El estado estacionario en el que $k = k^*$ es más interesante. En ese estado estacionario el consumo per cápita es estrictamente positivo (la distancia A), y el ahorro (la distancia B) permite mantener constante la cantidad de capital per cápita existente para siempre.

5 Implicaciones del modelo: I

Supongamos que la economía tiene actualmente un capital menor a k^*. Observa en la Figura 1 que entonces $sf(k) > (\delta + n)k$ para cualquier $k < k^*$. Es decir, a la izquierda de k^* tenemos que $\Delta k > 0$, por tanto el capital per cápita tiende a crecer a lo largo del tiempo, acercándose más y más al nivel k^*. Cuando eventualmente $k = k^*$, entonces la economía deja de crecer, y permanece con ese stock de capital per cápita para siempre.

Supongamos ahora que el capital actual de la economía es mayor a k^*. La Figura 1 muestra claramente que $sf(k) < (\delta + n)k$ para cualquier $k > k^*$, y por tanto, $\Delta k < 0$. Es decir, a la derecha de k^* el capital tiende a disminuir a lo largo del tiempo, acercándose más y más al nivel k^*. Cuando eventualmente $k = k^*$, entonces la economía deja de *decrecer*, y como antes, permanece con ese stock de capital per cápita para siempre.

Por tanto, concluimos que:

1. Para cualquier capital inicial distinto de cero, el modelo de Solow predice que en el largo plazo la economía alcanzará el nivel de capital correspondiente al estado estacionario k^*, independientemente de si el capital inicial es mayor o menor a k^*.

2. Como consecuencia de lo anterior, dos economías idénticas en todo (tecnología, tasa de crecimiento de la población, depreciación del capital, propensión marginal al ahorro) excepto en su capital inicial, convergen al mismo estado estacionario k^*. A esta propiedad del modelo la conocemos como *Convergencia Absoluta*.

3. En el estado estacionario k^* las variables en términos per capita no crecen. Sin embargo, las variables en términos agregados crecen a la tasa n. Por ejemplo, sabemos que

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta N}{N}.$$

Teniendo en cuenta que $\Delta y/y = 0$ y que $\Delta N/N = n$, y reordenando los términos en la ecuación anterior, obtenemos que $\Delta Y/Y = n$ (siguiendo el mismo razonamiento puedes obtener la misma conclusión para la tasa de crecimiento de C y de K).

6 Política Económica

Ahora que ya sebemos que existe un estado estacionario al cual convergeremos desde cualquier capital inicial (distinto de cero), podemos intentar hacer algunos experimentos de política económica. Por ejemplo, podemos estudiar como podríamos alterar el estado estacionario k^*, quizás con el objetivo de hacer que sea mayor de lo que actualmente es.

Claramente, de acuerdo con el modelo las únicas posibilidades consisten en mejorar la tecnología, y/o alterar las tasas n, δ y s. De momento dejaremos a un lado las mejoras tecnológicas (las estudiaremos más adelante), y nos concentraremos en los efectos que pueden tener variaciones en las tasas n, δ y s. Estas tasas reflejan los gustos y las preferencias de las familias de cada economía, pero ciertamente, un gobierno podría intentar alterarlas. Por ejemplo, el gobierno Chino ha implementado fuertes controles de natalidad durante buena parte de la segunda mitad del Siglo XX. Este tipo de medida tiene un efecto inmediato sobre n, la cual se hace mas pequeña. Observa que si n disminuye, la pendiente de la recta $(\delta + n)k$ se hace mas pequenya, de forma que manteniendo todo lo demás constante, la intersección entre $sf(k0$ y $(\delta + n)k$ se desplaza a la derecha, dando lugar a un nuevo estado estacionario donde k^* es mayor que antes. Para convencerte de ello, realiza tu mismo una gráfica mostrando el cambio en la recta. Observa también que obtenemos el mismo resultado si δ disminuye. Uno podría argumentar que en economías donde el capital instalado es más viejo, éste se deprecia a una tasa mayor que en economías donde el capital es más nuevo. Por tanto, un gobierno podría favorecer la renovación del capital (y de esta forma a aumentar el stock de capital en el estado estacionario) mediante incentivos fiscales a la inversión. Finalmente, un gobierno también podría promover la "cultura del ahorro" con el objetivo de aumentar s. Observa que en este caso, la curva $sf(k)$ se desplazaría en sentido ascendente, dando lugar de nuevo a un estado estacionario más elevado. Nota que los efectos discutidos aquí serían los opuestos en caso de aumentar n y δ, y de disminuir s.

Consideremos con un poco más de detalle las políticas que afectan a la propensión marginal al ahorro, s. Una pregunta importante es determinar bajo qué condiciones es deseable aumentar s. Dado que en el contexto del modelo lo único que pueden hacer las familias es consumir y ahorrar, parece razonable suponer que tales políticas son deseables si consiguen aumentar el consumo. Observa con detenimiento la Figura 2, donde se muestra el efecto de aumentar la tasa de ahorro. Claramente, el consumo del estado estacionario después de aumentar s es menor que el que corresponde al estado

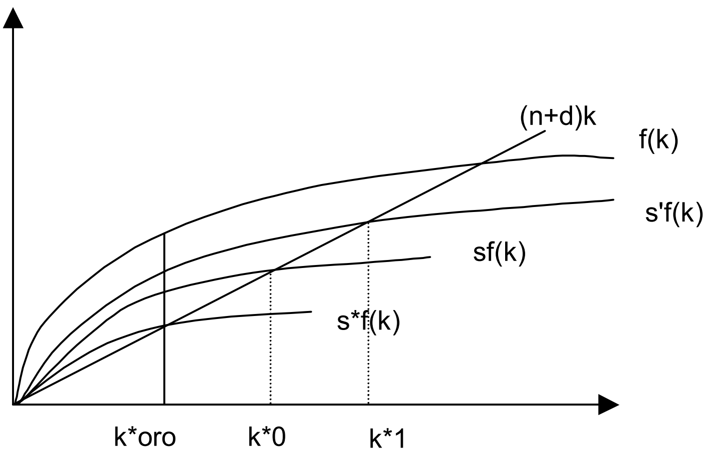

Figure 2:

estacionario original. Por tanto, en este caso deberíamos concluir que *no es deseable* aumentar s. Considera ahora la representación en la Figura 3. En este caso el mismo criterio anterior sugiere que *sí es deseable* aumentar s. De hecho, si repitiéramos el ejercicio anterior para muchas s distintas, encontraríamos una relación entre el consumo del estado estacionario como una función de s que resultaría muy parecida a la que representa la Figura 4. Claramente, en esa figura s^* es tal que el consumo del estado estacionario es máximo. A la propensión marginal al ahorro s^* se la conoce como la Propensión de la Regla de Oro, por que garantiza el máximo consumo para todas las generaciones de familias, y al capital correspondiente se le denomina Capital de la Regla de Oro.

Para comprender esto mejor, considera lo que ocurre con el consumo, la producción y el capital a lo largo del tiempo cuando aumentamos s en una economía en la que inicialmente $s < s^*$, y en una economía donde $s > s^*$ (las Figuras 5 y 6 muestran estas situaciones graficamente para el consumo). Claramente, en el primer caso el consumo diminuye inicialmente, pero en el largo plazo el consumo es mucho mayor que inicialmente. En un planteamiento un poco más realista, esta representación sugiere que la generación existente cuando se produce el cambio de política económica sale perjudicada, a cambio de un mayor bienestar en las generaciones futuras.

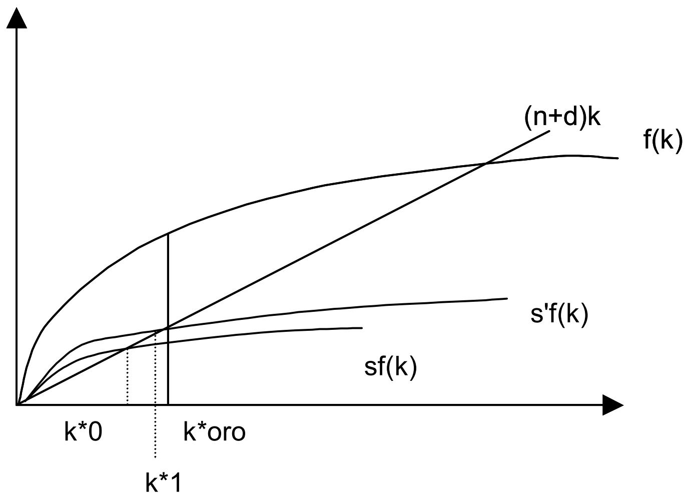

Figure 3:

Por tanto, en la formulación de política económica deberíamos ser capaces de repartir de forma equitativa tanto los costos de las reformas, como los beneficios que conlleven. En particular, el gobierno podría financiar una reforma emitiendo una cierta cantidad de deuda (en lugar de poner impuestos solamente sobre la generación corriente), y pagar esa deuda con impuestos recaudados a las generaciones futuras. De hacer una buena programación, el gobierno es capaz de aumentar el consumo de todos los agentes en todas las generaciones, presente y futuras!.

Considera ahora la situación mostrada en la Figura 6. Claramente, en este caso tenemos que $s > s^*$, y aumentar s solamente implica reducir el consumo de todas las generaciones, tanto presente como futuras. Puedes completar las representaciones de las dos ficuras anteriores graficando tu mismo la evolución del capital y de la producción per cápita en cada caso.

7 Implicaciones del modelo: II

También podemos utilizar la ecuación en (3) para estudiar directamente el comportamiento de la tasa de crecimiento del capital per cápita. Para

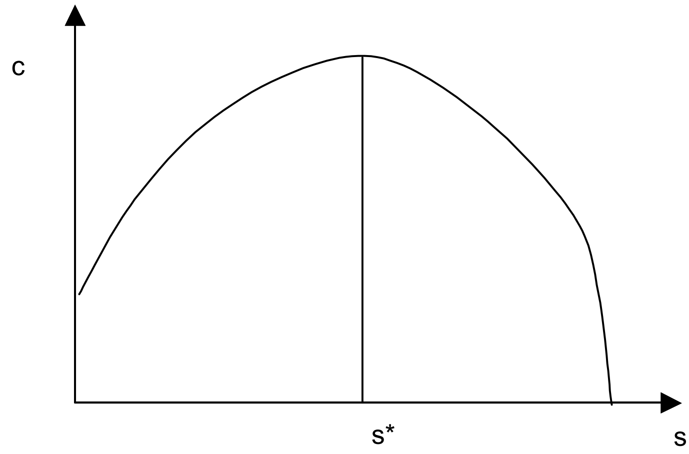

Figure 4:

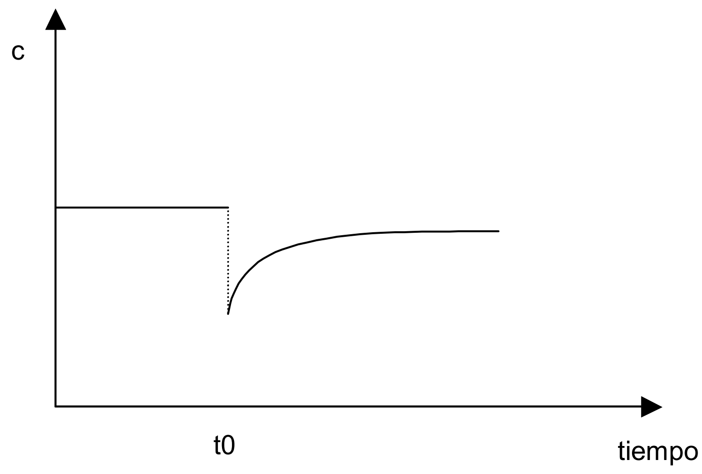

Figure 5:

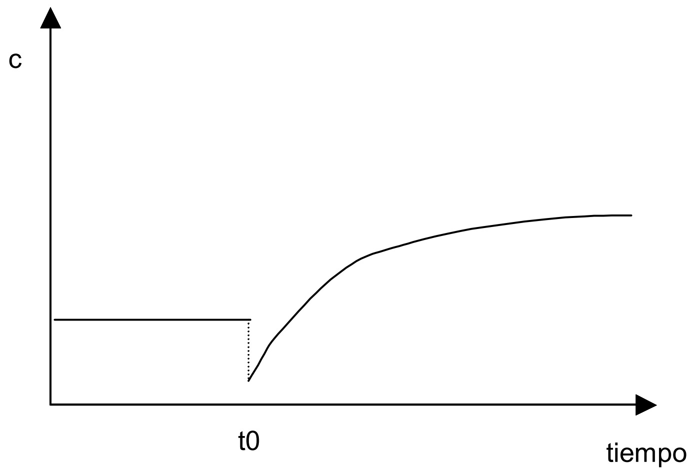

Figure 6:

hacerlo, dividimos cada lado de la ecuación por k, y obtenemos que

$$\gamma = \frac{\Delta k}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (\delta + n).,$$

donde $\gamma = \Delta k/k$ es justamente la definición de la tasa de crecimiento de k. La Figura 7 muestra graficamente cada uno de los componentes de la ecuación anterior. Observa que $\gamma > 0$ cuando $sf(k)/k > (\delta + n)$, que $\gamma < 0$ cuando $sf(k)/k < (\delta + n)$, y que $\gamma = 0$ cuando $sf(k)/k = (\delta + n)$. Nota que $\gamma = 0$ solamente en k^* (de hecho, también debería ser igual a cero en $k = 0$, pero en ese punto la función es discontinua).

De forma parecida a las conclusiones anteriores, tenemos que

4. A la izquierda de k^*, la tasa de crecimiento de k es positiva, y a la derecha de k^* la tasa de crecimiento es negativa. En particular, cuanto más alejada esté una economía de k^*, mayor será su tasa de crecimiento (si su capital es menor a k^*), y mayor será su tasa de decrecimiento (si su capital es mayor a k^*).

5. Como consecuencia de lo anterior, si comparamos dos economías idénticas en todo excepto en su capital inicial, y ambas economías se encuentran por debajo de k^*, entonces la economía inicialmente más pobre (con un capital per cápita menor), crece más rapidamente que la economía inicialmente más rica (con un capital per cápita mayor). En otras palabras, las economías po-

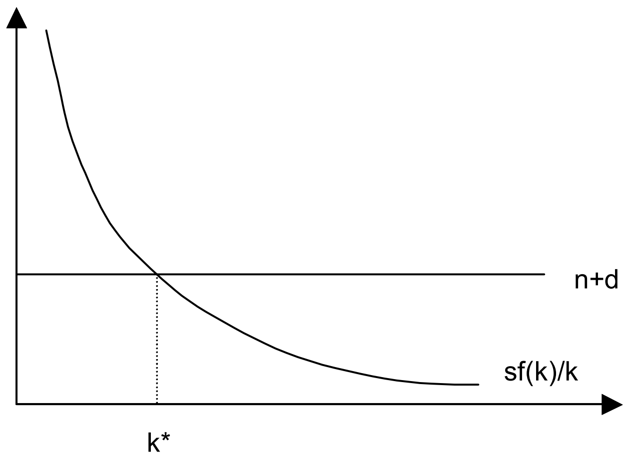

Figure 7:

bres tienden a alcanzar a las economías ricas. A pesar de ello, las economías pobres nunca "adelantan" (en términos de capital per cápita) a las economías ricas. Esto se debe a que a medida que las economías van creciendo, también su tasa de crecimiento se va haciendo mas pequeña.

Para las comparaciones entre economías realizadas hasta este momento hemos supuesto que las únicas diferencias consistían en el capital inicial que éstas tenían. En cierto modo, por tanto, es como si hubiéramos estado comparando a una misma economía en dos instantes distintos del tiempo, por ejemplo México en 1940, y México en el 2000. Qué podemos concluir si intentamos comparar dos economías distintas no solamente en su capital inicial, si no también en su tecnología, propensión marginal al ahorro, tasa de depreciación del capital y tasa de crecimiento de la población?

6. En general las economías convergen a estados estacionarios distintos, es decir, en el largo plazo cada economía converge a su propio estado estacionario, y los niveles de capital per capita serán distintos. Por tanto, también deberíamos esperar que la producción, el consumo y el ahorro per capita sean distintos.

7. Cuando las economías tienen la misma tecnología (o muy parecida), y las diferencias entre ellas se deben esencialmente a diferencias en la tasa de crecimiento de la población, depreciación del capital y/o tasa de ahorro, obtenemos que en general crecen más rapidamente las economías que se encuentran más alejadas de su estado estacionario. Esta es una conclusión importante, ya que ahora ya no es suficiente saber si la economía A tiene más o menos capital per cápita que la economía B para concluir qué economía crecerá más rapidamente. Por ejemplo, la economía de los Estados Unidos tiene un capital per cápita muy superior a la economía de Gabón (una de las economías más pobres del mundo), y sin embargo, la tasa de crecimiento en Estados Unidos ha sido historicamente ostensiblemente superior a la de Gabón. De acuerdo con lo indicado anteriormente debemos concluir que si el modelo de Solow es una descripción aceptablemente buena de la realidad, los Estados Unidos han crecido a tasas mayores que Gabón debido a que todavía se encuentran más alejados de su estado estacionario que la economía africana. Es decir, el modelo de Solow predice que si Gabón crece muy poco (o no lo hace en absoluto) es por que esencialmente ya ha llegado a su estado estacioanrio.

8. Aún si las economías convergen a estados estacionarios distintos, en el largo plazo, sus tasas de crecimiento en términos per cápita tienden a igualarse (al igual que en la primera versión del modelo de Solow, en realidad ninguna economía mostrará crecimiento alguno en términos per cápita). Es decir, deberíamos observar una cierta convergencia en las tasas de crecimiento. A este tipo de convergencia observada en el modelo cuando las economías son distintas, juntamente con lo expresado en el punto 7 anterior, se la conoce como *Convergencia Condicional*.

Ejemplo con Tecnología Cobb-Douglas

La tecnología Cobb-Douglas tiene la siguiente forma $Y = K^\alpha N^\beta$, con $\alpha+\beta = 1$. Por tanto la podemos escribir como $Y = K^\alpha N^{1-\alpha}$. Lo primero que haremos será expresar esta tecnología en términos per cápita. Para ello dividimos cada lado de la ecuación anterior por N, de forma que obtenemos

$$y = \frac{Y}{N} = \frac{K^\alpha N^{1-\alpha}}{N} = \left(\frac{K}{N}\right)^\alpha \left(\frac{N}{N}\right)^{1-\alpha} = k^\alpha,$$

donde hemos utilizado la regla matemática $x^a x^b = x^{a+b}$, y por tanto, $N = N^1 = N^\alpha N^{1-\alpha}$. Ya tenemos que $y = k^\alpha$. Con esta expresión encontramos que

$$\Delta k = sk^\alpha - (\delta + n)k. \tag{4}$$

Ahora ya podemos determinar el estado estacionario, puesto que sabemos que en el estado estacionario $\Delta k = 0$. Por tanto tendremos que $0 = sk^\alpha -$

$(\delta+n)k$, de forma que $sk^{\alpha}=(\delta+n)k$, con lo que dividiendo a ambos lados por k obtenemos:

$$sk^{\alpha-1}=\delta+n.$$

Utilizando la regla matemática $x^a=1/x^{-a}$ tenemos que $k^{\alpha-1}=1/k^{-(\alpha-1)}=1/k^{1-\alpha}$, de forma que reordenando términos en la expresión anterior llegamos a que

$$k^*=\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

También podemos utilizar la expresión (4) para encontrar la tasa de crecimiento del capital per cápita. Si dividimos cada lado de la ecuación por k encontramos que

$$\frac{\Delta k}{k}=s\frac{k^{\alpha}}{k}-(\delta+n),\Rightarrow\frac{\Delta k}{k}=s\frac{1}{k^{1-\alpha}}-(\delta+n).$$

Finalmente, podemos utilizar la ecuación (4) para determinar la trayectoria temporal del capital, el consumo, ahorro, etc. Observa que

$$k_{t+1}-k_t=\Delta k=sk_t^{\alpha}-(\delta+n)k_t,$$

donde k_t es el capital existente al principio del periodo t y k_{t+1} es el capital al final del periodo t, es decir, el capital al principio del periodo $t+1$. Si aislamos k_{t+1} de la ecuación anterior obtenemos que

$$k_{t+1}=sk_t^{\alpha}+(1-(\delta+n))k_t.$$

Claramente, por tanto, si conocemos el capital del periodo t también podemos determinar el del periodo $t+1$, y el de cualquier otro periodo futuro. Como sabemos que el ahorro en cualquier instante es simplemente $a_t=sf(k_t)$, también podemos determinar la secuencia de ahorros de la economía. Del mismo modo, podemos determinar la secuencia de consumos, ya que $c_t=(1-s)f(k_t)$.

8 Crecimiento Endógeno

Una de las predicciones "desagradables" del modelo de Solow es que en el largo plazo, deberíamos observar que el capital per capita (y por tanto la producción, el consumo, etc.) no crecen. Esta predicción está en franco desacuerdo con lo que dicen los datos para una gran mayoría de paises: en muchos paises las tasas de crecimiento del PIB per cápita resultan más bien modestas, pero en cualquier caso, positivas. Por otra parte, en el modelo de Solow las variables agregadas en el largo plazo crecen a la misma tasa de crecimiento que la población, la cual, recuerda que está exogenamente predeterminada: nada en el modelo de Solow nos dice cuanto es n, ya que se trata de un parámetro exógeno. Es decir, en el mejor de los casos el modelo de Solow es un modelo de crecimiento *exógeno.* Como podemos extender nuestra teoría para poder explicar tanto el crecimiento per cápita como en términos agregados? Antes de intentar responder a la pregunta, resultará instructivo comprender por que en el modelo de Solow finalmente el crecimiento en términos per capita se detiene.

El gran culpabale es el supuesto de rendimientos decrecientes de la función de producción expresada en términos per cápita. Simplemente, este supuesto implica que a medida que aumentamos el stock de capital per capita, los aumentos en la producción per cápita son cada vez mas pequeños. En realidad, en algún momento son tan pequeños que solamente nos permiten mantener el capital per cápita constante a lo largo del tiempo, y para niveles de capital per capita mayores, lo que aumenta la producción ni tan siquiera es suficiente como para lograr reponer el capital depreciado y dotar a los nuevos trabajadores con la misma cantidad de capital que a los trabajadores ya existentes.

La forma más simple de extender la teoría expuesta hasta ahora es suponer que la función de producción presenta rendimientos constantes en k. El ejemplo más conocido de este tipo de funciones es la función Ak: $y = Ak$ (dejemos a un lado la originalidad en la elección del nombre de la función). Si tenemos en cuenta el ejemplo de la tecnología Cobb-Douglas presentado anteriormente, la tecnología Ak no es más que una Cobb-Douglas con $\alpha = 1$. Consideremos la ecuación que describe la variación del capital correspondiente a este caso:

$$\Delta k = Ak - (n + \delta)k. \tag{5}$$

Observa que en este caso, podemos escribir la ecuación como $\Delta k = (A - (n + \delta))k$. Esto es interesante, por que resulta que el signo de Δk depende solamente de la diferencia $A - (n + \delta)$, y no depende del nivel de capital per cápita. Nota que si $A > (n + \delta)$, entonces $\Delta k > 0$ para cualquier nivel de capital, de forma que el capital per capita crece indefinidamente. En este caso tenemos que hay crecimiento sostenido. Si calculamos la tasa de crecimiento del capital per cápita encontramos que

$$\frac{\Delta k}{k} = A - (n + \delta).$$

Esta versión del modelo nos puede ayudar a explicar por que en Estados Unidos de hecho observamos crecimiento sostenido a lo largo del tiempo (nota que en la ecuación anterior la tasa de creciemiento de k es constante si A, n y δ se mantienen constantes a lo largo del tiempo!). Observa, sin embargo, que si $A < (n+\delta)$, entonces tenemos que $\Delta k < 0$, de forma que la economía decrece a lo largo del tiempo a una tasa constante, y en el largo plazo su capital per cápita se acercará arbitrariamente a cero. Igualmente, en caso de $A = (n+\delta)$, entonces tendremos que $\Delta k = 0$ para cualquier nivel de capital. En otras palabras, todos los niveles de capital son de estado estacionario!. Puedes dibujar tu mismo los componentes de la ecuación (5) para cada caso y convencerte de ello.

Exite una extensa literatura que explica de forma bastante distinta el fenómeno del crecimiento sostenido, conocida genericamente como teoría de"crecimiento endogeno". En esta literatura se supone que la función de producción en términos per cápita puede expresarse como $y_t = A_t f(k_t)$. Es decir, el producto per cápita en el instante t depende tanto de la cantidad de capital en términos per cápita en ese instante, k_t, a través la tecnologia f, como de la productividad total de los factores, A_t. El elemento fundamental que distingue a este conjunto de teorías es que A_t puede cambiar a lo largo del tiempo. Observa que, implicitamente, en el modelo de Solow descrito anteriormnete suponemos que $A_t = 1$ en todos los periodos. Imagina momentaneamente que en el modelo de Solow permitimos que A_t aumente a lo largo del tiempo. Si suponemos que en el primer instante estamos en un estado estacionario y que en el siguiente periodo A aumentó, entonces la ecuación que describe la variación en k indica que el capital tenderá a aumentar. Esta situación se describe graficamente en la Figura 8.

Si extendemos este razonamiento y continuamos suponiendo que A crece constantemente, entonces también en capital per cápita crece constantemente, y con el, la producción y el consumo en términos per cápita. Por tanto, este conjunto de teorías también puede explicar por que en algunas economías sí observamos crecimiento sostenido. Lo único que nos queda por aclarar es por que A crece a lo largo del tiempo, y de hecho, los economistas tardaron unos 30 años en proponer respuestas convincentes.

Una primera explicación se basa en lo que llamamos "externalidades". Por ejemplo, cuando una empresa invierte en mejorar su red de comunicaciones

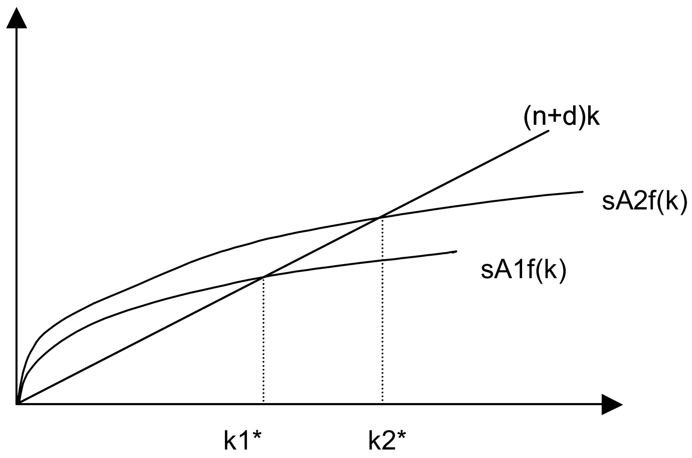

Figure 8:

terrestres para mejorar sus canales de aprovisionamiento de factores de producción y su red de distribución de productos, invertirá para mejorar el estado de las carreteras, vias ferroviarias, puertos marítimos... Sin embargo, los beneficios de mejores redes no solamente la beneficiarán a ella: todas las empresas en la misma área geográfica se beneficiarán de esa inversión. En pocas palabras, las decisiones de algunas empresas generan externalidades positivas a otras empresas, y esas "otras" empresas obtienen los beneficios gratuitamente, incentivando el aumento de la producción y por tanto, el crecimiento económico.

La segunda explicación consiste en explotar la posibilidad de que las empresas no sean perfectamente competitivas. Por ejemplo, es muy díficil sostener seriamente que el mercado de computadoras personales, el de medicamentos, o el de productos lácticos –solamente para citar algunos ejemplos cotidianos– es un mercado caracterizado con un número tan grande de empresas que todas ellas se comportan competitivamente (haz la prueba, y veras que las marcas que eres capaz de recordar en cada caso no son superiores a quince). Por tanto, en muchos mercados las empresas realmente gozan de un cierto poder de mercado y pueden, por ejemplo, alterar los precios de venta de sus productos. Porqué motivo pueden querer esas empresas alterar los precios? Sin ninguna duda, para obtener mayores beneficios! En el contexto de los modelos macroeconómicos, los beneficios están directamente ligados a la productividad de su inversión, es decir, a la productividad del capital. Pero como podemos medir la productividad del capital en un modelo como el de Solow? Si lo pensamos por un momento..., la productividad del capital no es mas que lo que aumentan los ingresos por cada unidad de capital invertida, es decir, el valor del producto marginal del capital! Claramente, si la tecnología en términos per cápita puede escribirse como $A_t f(k_t)$, entonces una forma de hacer que la productividad del capital aumente consiste en aumentar A_t constantemente. Los mecanismos exactos mediante los cuales A aumenta a lo largo del tiempo nos tomarían mucho más trabajo del que pretendemos realizar en este curso, pero lo cierto, es que la competencia imperfecta es capaz de explicar este fenómeno. Por tanto, las teorías de crecimiento endógeno son una segunda forma de explicar el crecimiento sostenido tal como lo observamos en algunas economías. Teniendo en cuenta estas teorías, concluimos que la economía de los Estados Unidos crece constantemente por que existen muchas empresas (o sectores de produccion) que efectivamente pueden comportarse como monopolistas (por ejemplo empresas dedicadas a la inovación aeroespacial, farmacéuticas, electrónicas...), mientras que en Gabón, las empresas deben "competir perfectamente" (piensa, si no, en cuantas marcas exclusivas conoces que sean genuninamente originarias de de Gabón!).

9 Breve reseña histórica

Robert Solow publicó los trabajos referidos en estas notas en 1956 y 1957. Los siguientes economistas interesados en el crecimiento no pudieron mejorar las teorías de Solow de forma importante, y poco a poco, la profesión se interesó más y más por el "desarrollo" económico. La literatura sobre desarrollo fué siempre muy dialéctica y argumentativa, pero poco convinvente y dificilmente cuantificable (especialmente debido a la falta de datos históricos fiables). Este interés en el desarrollo más que en el crecimiento representó un atraso de unos treinta años: no fue hasta finales de los años ochenta cuando Paul Romer, Sergio Rebelo y Robert Lucas consiguieron formular los primeros modelos de crecimiento endógeno de la tradición neoclásica. Específicamente, Rebelo formuló el modelo Ak, y Romer y Lucas resolvieron varios modelos caracterizados con externalidades, competencia imperfecta, y combinaciones distintas de estos elementos. El impacto que tuvieron los trabajos de estos economistas en la comunidad de científicos fue inmediato y fulgurante. Durante los años 90 se estudiaron muchas nuevas explicaciones teóricas para el crecimiento sostenido, y por ejemplo, los trabajos de Xavier

Sala-i-Martin, y los de Robert Barro, demostraron que que varias predicciones del modelo de Solow (sobre convergencia absoluta y condicional) también se cumplian en modelos mucho más complejos. Igualmente, se generó una gran cantidad de trabajo empírico que ayudó a aclarar cuales de los elementos teóricos tenían realmente un sustento en los datos. Finalmente, los estudiosos de los procesos de desarrollo empezaron a utilizar los modelos de crecimiento para analizar los mecanismos que conducen a un mayor desarrollo económico, y hoy en día, esta rama de estudio vuelve a ser un hervidero de actividad que produce constantes avances sobre la evolución de la desigualdad en la riqueza, la importancia de la salud y de la educación, entre otros muchos temas interesantes. Toda esta actividad académica ha contribuido muy decisivamente a la implementación de políticas económicas que ayuden a reducir la pobreza. Solamente para citar un ejemplo, el programa PROGRESA instaurado a principios de los años noventa en México está considerado actualmente como uno de los mejores programas entre los de su categoría, y ha atraido la atención de numerosos economistas de prestigio internacional.