INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Departamento Académico de Economía

Economía V

Otoño 2019

Paquete de Ejercicios # 1
Modelo Estático de Producción y Consumo
Problema de la empresa y del consumidor

1. Considere una empresa competitiva con tecnología:

$$y = Al.$$

La empresa maxiza ganancias tomando como dados el salario w y elprecio del bien p.

   (a) Deduzca la función de demanda de trabajo.

   (b) Deduzca las ganancias ótimas de la empresa

2. Considere una empresa competitiva con tecnología:

$$y = Al^{1-\alpha},$$

con $o < \alpha < 1$.La empresa maxiza ganancias tomando como dados el salario w y elprecio del bien p.

   (a) *(Verdadero o Falso):* Un reducción en (w/p) da lugar a un aumento más que proporcional en las ganancias de la empresa.

3. Considere un individuo competitivo en una economía poblada por una sola empresa competitiva. Las preferencias del individuo están dadas por:

$$u(h, c) = \gamma \ln h + \ln c.$$

Su dotación de tiempo es H, que tiene que distribuir entre otras trabajadas, n, y ocio , h. La participación accionaria del individuo en la empresa representativa es θ. Suponga además que el individuo sabe que $\pi^* = \pi(w, p)$ y que la tecnología de la empresa es del tipo:

$$y = Al^{1-\alpha}.$$

   (a) Exprese, en términos de los parámetros del modelo, el umbral del salario real $(w/p)_0$, tal que si $w/p \leq (w/p)_0$, el individuo elige no trabajar.

(b) Considere el caso particular en que $\theta = 0$. ¿Cuál es el valor de $(w/p)_0$ en ese caso? Interprete intuitivamente su resultado.

4. Considere un individuo competitivo en una economía poblada por una sola empresa competitiva. Las preferencias del individuo están dadas por:

$$u(n, c) = c - \frac{n^{1+\gamma}}{1+\gamma},$$

donde n son las horas trabajadas (observe que el trabajo es un "mal"). Sea H su dotación de tiempo y sea θ su participación accionaria en la empresa. Suponga además que el individuo sabe que $\pi^* = \pi(w, p)$ y que la tecnología de la empresa es del tipo:

$$y = Al^{1-\alpha}.$$

(a) Grafique el mapa de curvas de indiferencia del individuo e indique cómo varía la combinación óptima de trabajo y consumo ante un aumento en θ, manteniendo el salario constante.

(b) Deduzca la función de oferta laboral del individuo.

(c) Exprese, en términos de los parámetros del modelo, el valor de $(w/p)_0$ tal que $n^* = H$. ¿Qué sucede si $(w/p) > (w/p)_0$?

5. Considere el problema de un individuo con función de utilidad:

$$u(h, c) = \gamma \ln h + \ln c,$$

que enfenta la restricción de tiempo:

$$h + n + e = H,$$

donde h representa el tiempo dedicado al ocio, n el tiempo dedicado al trabajo y e el tiempo dedicado a la educación. El tiempo dedicado a la educación incrementa la efectividad de cada unidad de tiempo dedicada a trabajar. Supondremos, de forma concreta, que si el individuo trabaja n unidades de tiempo y destina e unidades de tiempo a su educación, en realidad trabaja el equivalente a $e^{\phi}n$ unidades de tiempo "efectivas", con $0 < \phi < 1$. Sea w es el salario por unidad de tiempo efectiva; de tal manera, el ingreso laboral de un indivdiuo que trabaja n unidades de tiempo y destina e unidades a su educación es igual a $we^{\phi}n$ (observe, por ejemplo, que si el individuo no se educa, su ingreso laboral es cero, ya que las hora que trabaja son inútiles; observe también que con este tipo de planteamiento se obtiene que las personas más educadas obtienen mayor ingreso laboral por hora trabajada). Finalmente suponga que el individuo no posee acciones. Sea p el precio del bien de consumo.

(a) Obtenga las condiciones de primer orden con respecto a c, n y e. A partir de éstas, encuentre la relación que debe existir entre e^* y n^*.

(b) Con base a su respuesta al iniciso anterior, obtenga una expresión para la condición de eficiencia entre consumo y horas trabajadas que no dependa de las horas dedicadas a la educación.

(c) Utilice su respuesta al inciso anterior y la restricción presupuestaria para obtener la función de oferta de trabajo.

6. Considere un consumidor que tiene preferencias sobre dos bienes: el bien producido por las empresas, c, (cuyo precio es p) y un bien que el propio individuo produce en casa, z (por ejemplo, z indica el número de libros que el individuo lee). Note que el individuo no obtiene utilidad directa del ocio. El individuo busca distribuir de forma óptima su tiempo entre: trabajo en las empresas, n, y trabajo en casa, m (que el individuo destina a la producción de z). El individuo recibe el salario de mercado w por unidad de trabajo que ofrece al mercado y no obtiene remuneración por el trabajo en casa. Su dotación total de tiempo es H y su participación accionaria es $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_J)$. Suponga que sus preferencias están dadas por:

$$U(h, c, z) = \phi \ln z + \ln c.$$

El individuo produce en casa el bien z de acuerdo a la tecnología:

$$z = Bm^{1-\nu}, \qquad 0 < \nu < 1$$

(a) Plantee el problema del consumidor, derive las condiciones de primer orden y obtenga las funciones de demanda de bienes, $c(w, p)$, y de oferta de trabajo, $n(w, p)$.

(b) Suponga ahora que, a raíz de una innovación tecnológica (una nueva técnica de lectura rápida), el parámetro B se incrementa. Indique de qué manera el cambio en esta variable incide sobre la función de oferta de trabajo.

(c) Suponga ahora que en lugar de experimentar un incremento en B, lo que sucede es que el parámetro ν disminuye (una bebida energética que evita el cansancio). Responda nuevamente a la pregunta del inciso (b).

1) $y = A\ell$, donde w: salario y p: precio

$$\Rightarrow \max_{\ell} \; p(A\ell) - w\ell$$

<u>CPO</u>:

$$[\ell]: \quad Ap - w = 0 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{Ap}^{Img} = \overbrace{w}^{Cmg} \quad \begin{cases} ① \; Img \geq Cmg \Rightarrow \text{produzco} \\ ② \; Img < Cmg \Rightarrow \text{no produzco} \end{cases} \quad \Rightarrow A = \frac{w}{p}$$

a) Deducir la demanda de trabajo:

$$\ell(w^*, p^*) \begin{cases} (0, \infty) & \text{si } \frac{w}{p} \leq A \; ① \\ 0 & \text{si } \frac{w}{p} > A \; ② \end{cases}$$

b) Deduzca las ganancias óptimas de la empresa:

$$\pi(w^*, p^*) \begin{cases} (0, \infty) & \text{si } \frac{w}{p} \leq A \\ 0 & \text{si } \frac{w}{p} > A \end{cases}$$

2) $y = A\ell^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1$ con salario w y precio p

$$\Rightarrow \max_{\ell} \; p(A\ell^{1-\alpha}) - w\ell$$

<u>CPO:</u>

$$[\ell]: \; (1-\alpha)pA\ell^{-\alpha} - w = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ell^{\alpha}} = \frac{w}{(1-\alpha)pA}$$

$$\Rightarrow \ell^{\alpha} = \frac{(1-\alpha)pA}{w}$$

$$\Rightarrow \ell(w^*, p^*) = \left[\frac{(1-\alpha)pA}{w}\right]^{1/\alpha}$$

$$\Rightarrow \ell(w^* p^*) = \left[\frac{(1-\alpha)A}{\frac{w}{p}}\right]^{1/\alpha} \; //$$

$$\therefore \; y(w^*, p^*) = A\left[\frac{(1-\alpha)A}{\frac{w}{p}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = A^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{(1-\alpha)}{\frac{w}{p}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\therefore \; \pi(w^*, p^*) = \underbrace{pA\left[\frac{(1-\alpha)A}{\frac{w}{p}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}_{py} - \underbrace{w\left[\frac{(1-\alpha)A}{\frac{w}{p}}\right]^{1/\alpha}\frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)}\,\frac{p}{p}}_{(1-\alpha)py}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \pi(w^*, p^*) &= py - (1-\alpha)py \\ &= py - py + \alpha py \\ &= \alpha py \\ &= \alpha p A^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{(1-\alpha)}{\frac{w}{p}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\end{aligned}$$

a) (Verdadero o Falso): Una reducción en $\frac{w}{p}$ da lugar a un aumento más que proporcional en las ganancias de la empresa

$$\frac{\partial \pi}{\partial \frac{w}{p}} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\underbrace{\alpha p A^{\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{(1-\alpha)}{\frac{w}{p}}\right]}_{\pi}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1}\left[\frac{(1-\alpha)(-1)}{(\frac{w}{p})^2}\right] = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\pi\left(\frac{\cancel{(1-\alpha)}}{(\frac{w}{p})^2}\right)\left(\frac{\cancel{\frac{w}{p}}}{\cancel{(1-\alpha)}}\right) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\pi}{\frac{w}{p}}\right) < 0 \;\rightarrow\; \text{si} \downarrow \frac{w}{p} \Rightarrow \uparrow \pi$$

$$\varepsilon_{\pi,\frac{w}{p}} = \frac{\partial \pi}{\partial \frac{w}{p}} \cdot \frac{\frac{w}{p}}{\pi} = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{\frac{w}{p}}}\right)\left(\frac{\cancel{\frac{w}{p}}}{\cancel{\pi}}\right) = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$$

$$\begin{cases} \Delta \text{ más que proporcional} & \text{si } \alpha < 0.5 \\ \Delta \text{ proporcional} & \text{si } \alpha = 0.5 \\ \Delta \text{ menos que proporcional} & \text{si } \alpha > 0.5 \end{cases}$$

$\therefore$ F $\Rightarrow \downarrow \frac{w}{p}$ da lugar a $\uparrow \pi$, pero la proporción del cambio depende de α

3) $u(h,c) = \gamma \ln(h) + \ln(c)$, $H = n + h$, θ: participación accionaria , $\pi^* = \pi(w,p)$

$y = A\ell^{1-\alpha}$

a) Exprese, en términos de los parámetros del modelo, el umbral del salario real $\left(\frac{w}{p}\right)_0$, tal que si $\frac{w}{p} \leq \left(\frac{w}{p}\right)_0$, el individuo elige no trabajar $(n^* = 0)$

$$\Rightarrow \max_{\ell} \; p(A\ell^{1-\alpha}) - w\ell$$

CPO

$$[\ell]: (1-\alpha)pA\ell^{-\alpha} - w = 0 \Rightarrow \ell^{\alpha} = \frac{(1-\alpha)pA}{w} \Rightarrow \frac{w}{p} = \frac{(1-\alpha)A}{\ell} \quad \ldots (a)$$

$$\therefore \; \ell(w,p) = \left[\frac{(1-\alpha)A}{w/p}\right]^{1/\alpha}$$

$$\therefore \; y(w,p) = A\left[\frac{(1-\alpha)A}{w/p}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

$$\therefore \; \pi(w,p) = pA\left[\frac{(1-\alpha)A}{w/p}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - w\left[\frac{(1-\alpha)A}{w/p}\right]^{1/\alpha}$$

$$\Rightarrow \max_{h,c,n} \; \gamma\ln(h) + \ln(c) \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} H = n + h \\ pc = w\ell + \theta\pi \end{cases}$$

que se puede simplificar como:

$$\max_{n,c} \; \gamma\ln(H-n) + \ln(c) \quad \text{s.a.} \; \{ pc = wn + \theta\pi$$

$$\mathcal{L} = \gamma\ln(H-n) + \ln(c) + \lambda[wn + \theta\pi - pc]$$

CPO:

$$[n]: -\frac{\gamma}{H-n} + \lambda w = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\gamma}{w(H-n)}$$

$$[c]: \frac{1}{c} - \lambda p = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{pc}$$

$$\frac{\gamma}{w(H-n)} = \frac{1}{pc}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma c}{H-n} = \frac{w}{p} \quad \text{tangencia} \quad \ldots (1)$$

$$[\lambda]: wn + \theta\pi - pc = 0 \quad (2)$$

$$pc = \frac{w(H-n)}{\gamma}$$

sustituir (1) en (2)

$$wn + \theta\pi - \left[\frac{w(H-n)}{\gamma}\right] = 0$$

$$wn + \theta\pi - \frac{wH}{\gamma} + \frac{wn}{\gamma} = 0$$

$$w\left[n - \frac{H}{\gamma} + \frac{n}{\gamma}\right] = -\theta\pi$$

$$n\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{\theta\pi}{w} + \frac{H}{\gamma}$$

$$n\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right) = \frac{H}{\gamma} - \frac{\theta\pi}{w}$$

$$n^* = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left[\frac{H}{\gamma} - \frac{\theta\pi}{w}\right] \quad \ldots (3)$$

normali

sustituir (3) en (1)

$$\frac{\gamma p c}{w} = H - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left[\frac{H}{\gamma} - \frac{\theta\pi}{w}\right]$$

$$c^* = \frac{w}{\gamma p}\left[H - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left[\frac{H}{\gamma} - \frac{\theta\pi}{w}\right]\right]$$

---

5) $\max_{\{h,n,e,c\}} \quad u(h,c) = \gamma \ln h + \ln c \qquad s.a. \begin{cases} \boxed{h+n+e = H} \\ pc = we^{\phi}n \quad 0<\phi<1 \end{cases}$

$\begin{cases} h - \text{ocio} \\ n - \text{trabajo} \\ e - \text{educación} \end{cases}$

$\Rightarrow$ restricción presupuestal

El problema se puede simplificar:

$$\max_{\{n,e,c\}} \gamma \ln(H-n-e) + \ln c \qquad s.a. \quad pc = we^{\phi}n, \quad 0<\phi<1$$

$$\mathcal{L}(n,e,c,\lambda) = \gamma \ln(H-n-e) + \ln c + \lambda[we^{\phi}n - pc]$$

a) CPO:

$$[n]: \quad \frac{-\gamma}{H-n-e} + \lambda we^{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{H-n-e} = \lambda we^{\phi} \qquad (1)$$

$$[e]: \quad \frac{-\gamma}{H-n-e} + \lambda w\phi e^{\phi-1}n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{H-n-e} = \lambda w\phi e^{\phi-1}n \qquad (2)$$

$$[c]: \quad \frac{1}{c} - \lambda p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} = \lambda p \qquad (3)$$

$$[\lambda]: \quad we^{\phi}n - pc = 0 \qquad (4)$$

Relación entre e^* y n^*

→ igualar (1) y (2)

$$\cancel{\lambda w e^{\phi}} = \cancel{\lambda w}\phi e^{\phi-1}n$$

$$1 = \phi e^{-1}n$$

$$\boxed{e^* = \phi n^*} \qquad (5)$$

b) Condición de eficiencia entre consumo (c) y horas trabajadas (n) que no dependa de educación (e)

→ sustituir (3) en (1)

$$\lambda = \frac{1}{cp} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{H-n-e} = \frac{we^{\phi}}{cp}$$

→ despejar c^*

$$c^* = \frac{we^{\phi}(H-n-e)}{\gamma p} \qquad (6)$$

→ sustituir (5) en (6)

$$\boxed{c^* = \frac{w^*(\phi n^*)^{\phi}(H-n^*-\phi n^*)}{\gamma p}} \qquad (7)$$

c) Función de oferta de trabajo

→ sustituir (7) y (5) en (4)

$$\cancel{w}\,\cancel{(\phi n)^{\phi}}\,n = \cancel{p}\left[\frac{\cancel{w}\,\cancel{(\phi n)^{\phi}}\,(H-n-\phi n)}{\gamma \cancel{p}}\right]$$

$$n = \frac{(H-n-\phi n)}{\gamma}$$

$$\gamma n = H - n(1+\phi)$$

$$\gamma n + n(1+\phi) = H$$

$$n(\gamma+1+\phi) = H$$

$$\boxed{n^{*} = \frac{H}{\gamma+1+\phi}}$$

6) $u(h, c, z$

6. Considere un consumidor que tiene preferencias sobre dos bienes: el bien producido por las empresas, c, (cuyo precio es p) y un bien que el propio individuo produce en casa, z (por ejemplo, z indica el número de libros que el individuo lee). Note que el individuo no obtiene utilidad directa del ocio. El individuo busca distribuir de forma óptima su tiempo entre: trabajo en las empresas, n, y trabajo en casa, m (que el individuo destina a la producción de z). El individuo recibe el salario de mercado w por unidad de trabajo que ofrece al mercado y no obtiene remuneración por el trabajo en casa. Su dotación total de tiempo es H y su participación accionaria es $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_J)$. Suponga que sus preferencias están dadas por:

$$U(h, c, z) = \phi \ln z + \ln c.$$

El individuo produce en casa el bien z de acuerdo a la tecnología:

$$z = Bm^{1-\nu}, \qquad 0 < \nu < 1$$

(a) Plantee el problema del consumidor, derive las condiciones de primer orden y obtenga las funciones de demanda de bienes, $c(w, p)$, y de oferta de trabajo, $n(w, p)$.

(b) Suponga ahora que, a raíz de una innovación tecnológica (una nueva técnica de lectura rápida), el parámetro B se incrementa. Indique de qué manera el cambio en esta variable incide sobre la función de oferta de trabajo.

(c) Suponga ahora que en lugar de experimentar un incremento en B, lo que sucede es que el parámetro ν disminuye (una bebida energética que evita el cansancio). Responda nuevamente a la pregunta del inciso (b).